

УДК 517.958:535.4

doi:10.21685/2072-3040-2021-4-5

Анализ дифракционной эффективности дифракционных решеток модифицированным методом разделения переменных

Ю. Г. Смирнов¹, В. Ю. Мартынова², М. А. Москалева³, А. А. Цупак⁴

^{1,2,3,4}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹mmm@pnzgu.ru, ²lynxbax@mail.ru, ³m.a.moskaleva1@gmail.com, ⁴altsupak@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Цель работы – исследование дифракции электромагнитной волны на дифракционных решетках с несколькими штрихами на периоде. *Материалы и методы.* Для решения задачи применяется модифицированный метод разделения переменных. *Результаты.* Модифицированный метод разделения переменных программно реализован, проведены вычислительные эксперименты, проведено сравнение предложенного метода с методом разделения переменных. *Выводы.* численные результаты согласуются с известными теоретическими результатами исследования задачи, а также с результатами решения задачи другими численными методами. Предложенный метод является эффективным и может использоваться для моделирования сложных дифракционных решеток с многослойным покрытием.

Ключевые слова: дифракционные решетки, модифицированный метод разделения переменных, электромагнитные волны, дифракционная эффективность

Финансирование: работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и ГФЕН в рамках научного проекта 21-57-53001.

Для цитирования: Смирнов Ю. Г., Мартынова В. Ю., Москалева М. А., Цупак А. А. Анализ дифракционной эффективности дифракционных решеток модифицированным методом разделения переменных // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 4. С. 57–70. doi:10.21685/2072-3040-2021-4-5

Study of diffraction efficiency of diffraction gratings by the modified method of variables separation

Yu.G. Smirnov¹, V.Yu. Martynova², M.A. Moskaleva³, A.A. Tsupak⁴

^{1,2,3,4}Penza State University, Penza, Russia

¹mmm@pnzgu.ru, ²lynxbax@mail.ru, ³m.a.moskaleva1@gmail.com, ⁴altsupak@yandex.ru

Abstract. *Background.* The purpose of this work is to study the electromagnetic wave diffraction by cylindrical diffraction gratings. *Material and methods.* The problem is solved using the modified method of separation of variables. *Results.* The modified method of separation of variables was implemented, several computational experiments were performed to confirm the convergence of the method; the modified method was compared with the plane wave expansion method. *Conclusions.* The numerical results are consistent with well-known theoretical results as well as with several numerical results obtained using other methods. The described method is an efficient technique for solving problems of modeling complicated multilayer dielectric gratings.

Keywords: diffraction gratings, modified method of separation of variables, electromagnetic TE-waves, diffraction efficiency

Acknowledgments: the work was supported by the RFBR and NSFC within the research project 21-57-53001.

For citation: Smirnov Yu.G., Martynova V.Yu., Moskaleva M.A., Tsupak A.A. Study of diffraction efficiency of diffraction gratings by the modified method of variables separation. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2021;(4):57–70. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-4-5

Введение

Многослойные оптические покрытия и дифракционные решетки являются важными элементами современных лазерных и оптоэлектронных технологий. Их объединение в единые конструктивные элементы используется для усиления коротких лазерных импульсов до чрезвычайно высоких пиковых уровней мощности, превышающих несколько петаватт [1–3]. Другим важным применением многослойных покрытий с дифракционными решетками является спектральное объединение лазерного излучения, в котором множество некогерентных лазерных лучей разной длины волны объединяются в один луч. Комбинирование спектральных лучей является эффективным методом достижения чрезвычайно высокой непрерывной мощности лазера. Благодаря этому диодные лазеры могут быть использованы в промышленных целях: резке, сварке и других методах обработки материалов [4]. Комбинирование спектральных лучей используется и в медицинских приложениях [5].

Мы будем использовать термин «многослойные диэлектрические решетки» (МДР) для обозначения многослойных диэлектрических структур, состоящих из чередующихся слоев с высокими и низкими показателями преломления и дифракционных решеток, в верхних слоях этих структур. В настоящее время МДР-элементы почти полностью заменили традиционные голографические золотые решетки во многих важных приложениях. Это связано с высокой дифракционной эффективностью этих элементов [6] и их гораздо более высоким (в сравнении с голографическими золотыми решетками) порогом повреждения, вызванным лазером [7].

В настоящее время строгий анализ связанных волн (RCWA) [8–11] и моделирование во временной области с конечной разностью (FDTD) [12] обычно используется для решения прямой проблемы дифракции падающей волны элементом МДР. Все расчеты выполняются, как правило, с использованием коммерческого программного обеспечения, например [13, 14]. Этот подход достаточен в случае простых элементов МДР, состоящих из четвертьволновых диэлектрических зеркал с дифракционной решеткой, имеющей только одну канавку на период решетки. В случае более сложных элементов МДР с множеством различных канавок в периоде решетки вычислительная эффективность решения прямой задачи играет решающую роль. Для повышения вычислительной эффективности решения этой задачи мы предлагаем модифицированный метод разделения переменных. Его преимущество заключается в том, что решение записывается аналитически, и численно определяются только собственные значения одномерной краевой задачи, которые находятся как корни действительной функции одной переменной. Такой подход позволяет значительно сократить объем вычислений.

В работе дано описание модифицированного метода разделения переменных, проведено сравнение результатов расчетов методом плоских волн

в случае однослойного покрытия. Исследована дифракционная эффективность дифракционных решеток с многослойным покрытием.

1. Постановка задачи

Пусть свободное от рассеивателя пространство характеризуется постоянными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей $\epsilon_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$. Рассмотрим бинарную (с прямоугольной формой профиля) дифракционную решетку, помещенную на многослойное отражающее покрытие. (геометрия задачи представлена на рис. 1).

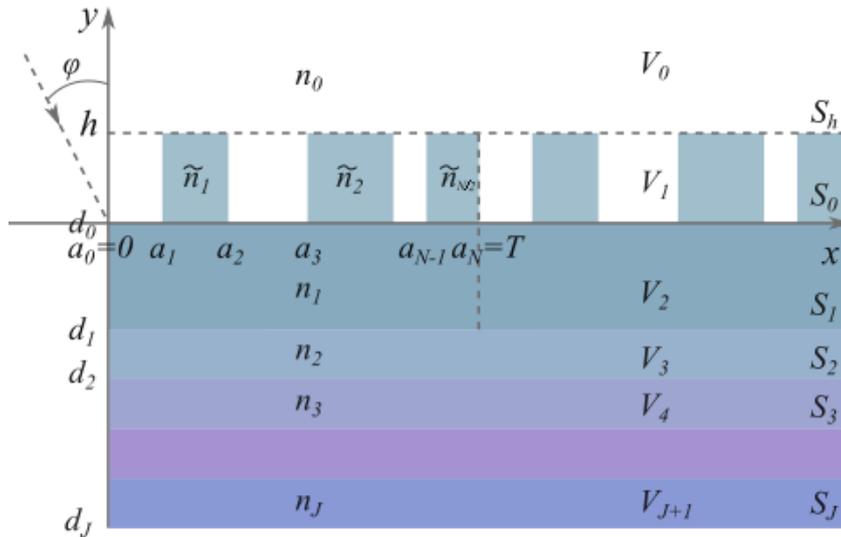


Рис. 1. Одномерно-периодическая диэлектрическая дифракционная решетка

Период решетки обозначен через $T > 0$, а высота гребня решетки – $h > 0$.

На решетку под произвольным углом φ падает электромагнитная ТЕ-волна. Падающее электрическое поле определяется продольной составляющей электрического поля

$$u_0 = \exp\left(-ik_0 n_0 (x \sin \varphi - (y - h) \cos \varphi)\right),$$

здесь $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ – волновое число свободного пространства; λ_0 – длина волны; n_0 – индекс преломления свободного пространства.

Рассмотрим показатель преломления $n(x, y)$, равный везде вне решетки n_0 , а в линиях решетки \tilde{n}_i , где $i = \overline{1, N/2}$. Здесь $N > 0$ – четное целое число, $N/2$ – количество штрихов решетки. При $y < 0$ $n(x, y)$ равно n_j в слоях многослойной диэлектрической структуры, где $j = \overline{1, J}$; $J \geq 0$ – количество слоев.

Требуется найти продольную составляющую полного электрического поля $u(x, y)$, которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\left(\Delta + k_0^2 n^2(x, y)\right) u(x, y) = 0,$$

условию квазипериодичности Флоке [2],

$$u(x, y) = u(x + T, y) e^{ik_0 n_0 T \sin \varphi},$$

условию непрерывности на поверхности решетки, за исключением краев заземления и на границах раздела между слоями, условию излучения на бесконечности [15] и условию конечности энергии в каждой ограниченной пространственной области. Также необходимо определить значения дифракционной эффективности основных порядков дифракции [8, 16].

Согласно методу плоских волн [3] представим отличную от нуля компоненту полного электрического поля в виде

$$u^{(0)}(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_l z_l(x) \exp(-ik_{0,y}l(y-h)), \quad y > h; \quad (1)$$

$$u^{(j)}(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} z_l(x) \left(p_l^{(j)} \exp(ik_{j,y}l(y-d_j)) + q_l^{(j)} \exp(-ik_{j,y}l(y-d_j)) \right), \quad d_j < y < d_{j-1}, \quad (2)$$

где

$$z_l(x) := \exp\left(-i\left(k_0 n_0 \sin \varphi - \frac{2\pi l}{T}\right)x\right), \quad j = \overline{1, J}, \quad p_l^{(J+1)} \equiv t_l, \quad q_l^{(J+1)} \equiv 0, \quad d_0 = 0.$$

Все коэффициенты $p_l^{(j)}$ и $q_l^{(j)}$ выражаются через t_l , как будет показано далее; коэффициенты r_l и t_l – неизвестные амплитудные коэффициенты отражения и прохождения l -х мод. Величины k_{xl} , $k_{j,y}l$ определяются соотношениями

$$k_{xl} = k_0 n_0 \sin \varphi - \frac{2\pi l}{T},$$

$$k_{j,y}l = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 n_j^2 - k_{xl}^2}, & k_0 n_j > |k_{xl}|, \\ -i\sqrt{k_{xl}^2 - k_0^2 n_j^2}, & k_0 n_j < |k_{xl}|, \end{cases} \quad 0 \leq j \leq J+1.$$

Неограниченную двумерную область $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq T\}$ решения задачи представим объединением открытых подобластей

$$V_0 = \{(x, y) \in V : y > h > 0\}, \quad V_1 = \{(x, y) \in V : 0 < y < h\},$$

$$V_j = \{(x, y) \in V : d_{j-1} < y < d_{j-2}\}, \quad j = \overline{2, J+1},$$

и прямых: $S_h = \{(x, y) : y = h\}$ и $S_j = \{(x, y) : y = d_j\}$, $j = \overline{0, J}$.

Области V_0 и V_j , $j = \overline{2, J+1}$, однородны и характеризуются заданными волновыми числами (см. рис. 1). В области V_1 выделим подобласть \bar{V}_T точек с абсциссой $x \in [0, T]$ и представим ее в виде

$$\bar{V}_T = \bigcup_i \bar{\Pi}_i, \quad \bar{\Pi}_i = (a_i, a_{i+1}) \times (0, h), \quad i = 0, \dots, N-1,$$

здесь $a_0 = 0$, $a_N = T$.

В прямоугольниках $\bar{\Pi}_i$ значения волнового числа равны $\kappa_{2i} = k_0 n_0$, $\kappa_{2i+1} = k_0 \tilde{n}_{i+1}$, $i = \overline{0, N/2-1}$, и, вообще говоря, различны (см. рис. 1). Величина шага в решетке $a_{i+1} - a_i$ непостоянна, т.е. рассматриваются неравномерные решетки.

2. Модифицированный метод разделения переменных для решения задачи

Опишем модифицированный метод разделения переменных, предлагаемый для решения задачи. Решение задачи в прямоугольниках $\bar{\Pi}_i$ будем искать в виде рядов

$$u(x, y) = \sum_{l=0}^{+\infty} X_l(x) Y_l(y), \quad (3)$$

учитывая, что $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца в каждом прямоугольнике, а также условиям сопряжения на сторонах прямоугольников $x = a_i$ и условию квазипериодичности.

Применяя метод разделения переменных, получим, что функции Y_l имеют вид

$$Y_l(y) = b_l^{(1)} \exp(i\sqrt{\lambda_l} y) + b_l^{(2)} \exp(-i\sqrt{\lambda_l} (y-h)). \quad (4)$$

Функции $X_l(x)$ являются решениями следующих задач на собственные значения:

$$\frac{X_l''}{X_l} + \kappa^2(x) = \lambda_l, \quad \kappa^2(x) = \kappa_i^2, \quad x \in (a_i, a_{i+1}); \quad (5)$$

$$X_l(0) = AX_l(T), \quad X_l'(0) = AX_l'(T); \quad [X_l] = [X_l'] = 0,$$

здесь

$$A = \exp(ik_0 n_0 T \sin \varphi) - \quad (6)$$

постоянная, входящая в условие квазипериодичности; $|A| = 1$.

Решение (3)–(6) называется точным решением задачи дифракции, полученным модифицированным методом разделения переменных.

Введем обозначение: $\gamma_i = \sqrt{\kappa_i^2 - \lambda_l}$. Из формул (5) получаем:

$$X_l'' + (\kappa^2(x) - \lambda_l)X_l = 0,$$

$$X_l(x) = c_i \sin \gamma_i(x - a_i) + d_i \cos \gamma_i(x - a_i), \quad x \in (a_i, a_{i+1}),$$

$$X_l(x) = c_{i+1} \sin \gamma_{i+1}(x - a_{i+1}) + d_{i+1} \cos \gamma_{i+1}(x - a_{i+1}), \quad x \in (a_{i+1}, a_{i+2}).$$

Из условий сопряжения во внутренних узлах a_i получаем систему из $(2N - 2)$ уравнений:

$$c_i \sin \gamma_i \Delta_i + d_i \cos \gamma_i \Delta_i = d_{i+1},$$

$$c_i \cos \gamma_i \Delta_i - d_i \sin \gamma_i \Delta_i = c_{i+1} \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i}, \quad 0 \leq i \leq N - 2, \quad \Delta_i := a_{i+1} - a_i, \quad (7)$$

а из условий квазипериодичности получим еще два уравнения:

$$d_0 = Ac_{N-1} \sin \gamma_{N-1} \Delta_{N-1} + Ad_{N-1} \cos \gamma_{N-1} \Delta_{N-1},$$

$$c_0 \gamma_0 = A \gamma_{N-1} (c_{N-1} \cos \gamma_{N-1} \Delta_{N-1} - d_{N-1} \sin \gamma_{N-1} \Delta_{N-1}). \quad (8)$$

Таким образом, получена однородная система $2N$ уравнений для нахождения $2N$ неизвестных. Эта система имеет нетривиальное решение, если определитель матрицы системы равен нулю.

Задачу об отыскании собственных чисел λ_l задачи можно свести к проблеме вычисления некоторого определителя второго порядка.

Записывая уравнения (7), (8) в матричной форме

$$(c_{i+1}, d_{i+1})^T = S_i(c_i, d_i)^T \quad (0 \leq i \leq N - 2), \quad (c_0, d_0)^T = Q(c_N, d_N)^T,$$

сведем исходную систему линейных алгебраических уравнений к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$(c_0, d_0)^T = QS_{N-2} \dots S_0(c_0, d_0)^T, \quad (9)$$

откуда получим требуемое уравнение:

$$\det(I - QS_{N-2} \dots S_0) = 0. \quad (10)$$

В качестве $(c_0, d_0)^T$ можно взять любое нетривиальное решение системы (9) при $\lambda = \lambda_l$.

Определив собственные значения λ_l и собственные функции задачи (5), получим из (3) представление решения $u(x, y)$ в конечной области V_T

$$u(x, y) = \sum_{l=0}^{+\infty} X_l(x) Y_l(y)$$

с неизвестными коэффициентами $b_l^{(1)}, b_l^{(2)}$.

Заметим, что за счет выбора функций в (1)–(2) и выполнения условий (5) условия квазипериодичности автоматически выполняются.

Учитывая условия сопряжения при $y = d_j$, $j = \overline{1, J-1}$, получаем

$$p_l^{(j)} + q_l^{(j)} = p_l^{(j+1)} \exp\left(ik_{j+1,yl}(d_{j-1} - d_j)\right) + q_l^{(j+1)} \exp\left(-ik_{j+1,yl}(d_{j-1} - d_j)\right),$$

$$\left(p_l^{(j)} - q_l^{(j)}\right)k_{l,yj} = p_l^{(j+1)}k_{j+1,yl} \exp\left(ik_{j+1,yl}(d_{j-1} - d_j)\right) -$$

$$-q_l^{(j+1)}k_{j+1,yl} \exp\left(-ik_{j+1,yl}(d_{j-1} - d_j)\right).$$

Из последних формул находим

$$p_l^{(j)} = \frac{1}{2} \left(p_l^{(j+1)} P_l^{(j+1)} + q_l^{(j+1)} Q_l^{(j+1)} + \frac{k_{j+1,yl}}{k_{j,yl}} \left(p_l^{(j+1)} P_l^{(j+1)} - q_l^{(j+1)} Q_l^{(j+1)} \right) \right), \quad (11)$$

$$q_l^{(j)} = \frac{1}{2} \left(p_l^{(j+1)} P_l^{(j+1)} + q_l^{(j+1)} Q_l^{(j+1)} - \frac{k_{j+1,yl}}{k_{j,yl}} \left(p_l^{(j+1)} P_l^{(j+1)} - q_l^{(j+1)} Q_l^{(j+1)} \right) \right), \quad (12)$$

где $P_l^{(j)} := \exp\left(ik_{l,yj}(d_{j-1} - d_j)\right)$, $Q_l^{(j)} := \exp\left(-ik_{l,yj}(d_{j-1} - d_j)\right)$, $j = \overline{1, J-1}$.

Учитывая, что $p_l^{(J+1)} \equiv t_l$, $q_l^{(J+1)} \equiv 0$, все коэффициенты $p_l^{(j)}$ и $q_l^{(j)}$ выражаются через t_l . Тогда $p_l^{(1)}$ и $q_l^{(1)}$ могут быть записаны в виде $p_l^{(1)} = \tilde{p}_l^{(1)} t_l$, $q_l^{(1)} = \tilde{q}_l^{(1)} t_l$, где $\tilde{p}_l^{(1)}$ и $\tilde{q}_l^{(1)}$ определяются из (11), (12) при $\tilde{p}_l^{(J+1)} \equiv 1$, $\tilde{q}_l^{(J+1)} \equiv 0$.

Далее, коэффициенты r_l , t_l и $b_l^{(1)}, b_l^{(2)}$ находятся из условий сопряжения при $y = 0$ и $y = h$:

$$\sum_{l=0}^{+\infty} X_l(x) Y_l(h) = u_0(x, h) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_l z_l(x), \quad (13)$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty} X_l(x) Y_l'(h) = u_0'(x, h) - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_l i k_{0,yl} z_l(x), \quad (14)$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty} X_l(x) Y_l(0) =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} t_l z_l(x) \left(\tilde{p}_l^{(1)} \exp\{ik_{1,y}l(d_0 - d_1)\} + \tilde{q}_l^{(1)} \exp\{-ik_{1,y}l(d_0 - d_1)\} \right), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{+\infty} X_l(x) Y_l'(0) = \\ & = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} ik_{1,y}l t_l z_l(x) \left(\tilde{p}_l^{(1)} \exp\{ik_{1,y}l(d_0 - d_1)\} - \tilde{q}_l^{(1)} \exp\{-ik_{1,y}l(d_0 - d_1)\} \right), \quad (16) \end{aligned}$$

где в $u'_0(x, h)$ производная берется по y в точке h .

Заметим, что выражения справа в формулах (13)–(16) – это ряды Фурье функции на отрезке $[0, T]$. Умножая (13)–(16) на соответствующие экспоненты и интегрируя выражения от 0 до T , получаем два уравнения относительно $b_l^{(1)}, b_l^{(2)}$:

$$\begin{aligned} & -ik_{0,y}l \int_0^T \exp\left\{i\left(k_0 n_0 \sin \varphi - \frac{2\pi l}{T}\right)x\right\} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} X_p(x) Y_p(h) - u_0(x, h) \right) dx = \\ & = \int_0^T \exp\left\{i\left(k_0 n_0 \sin \varphi - \frac{2\pi l}{T}\right)x\right\} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} X_p(x) Y'_p(h) - u'_0(x, h) \right) dx, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ik_{1,y}l \left(\tilde{p}_l^{(1)} \exp\{ik_{1,y}l(d_0 - d_1)\} - \tilde{q}_l^{(1)} \exp\{-ik_{1,y}l(d_0 - d_1)\} \right) \times \\ & \times \int_0^T \exp\left\{i\left(k_0 n_0 \sin \varphi - \frac{2\pi l}{T}\right)x\right\} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} X_p(x) Y_p(0) \right) dx = \\ & = \left(\tilde{p}_l^{(1)} \exp\{ik_{1,y}l(d_0 - d_1)\} + \tilde{q}_l^{(1)} \exp\{-ik_{1,y}l(d_0 - d_1)\} \right) \times \\ & \times \int_0^T \exp\left\{i\left(k_0 n_0 \sin \varphi - \frac{2\pi l}{T}\right)x\right\} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} X_p(x) Y'_p(0) \right) dx \quad (18) \end{aligned}$$

для всех целых l .

3. Численный метод решения задачи

Для численного решения задачи следует взять

$$u(x, y) = \sum_{l=0}^M X_l(x) Y_l(y)$$

для некоторого M .

Тогда имеем $(2M+2)$ коэффициентов $b_l^{(1)}, b_l^{(2)}$. Выберем M четным числом. В уравнениях (17), (18) возьмем $(M+1)$ значений $l = -M/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, M/2$.

В результате получается система линейных алгебраических уравнений порядка $(2M+2)$:

$$\begin{aligned}
 & -ik_{0,y,l} \int_0^T \exp \left\{ i \left(k_0 n_0 \sin \varphi - \frac{2\pi l}{T} \right) x \right\} \left(\sum_{p=0}^M X_p(x) Y_p(h) - u_0(x, h) \right) dx = \\
 & = \int_0^T \exp \left\{ i \left(k_0 n_0 \sin \varphi - \frac{2\pi l}{T} \right) x \right\} \left(\sum_{p=0}^M X_p(x) Y_p'(h) - u_0'(x, h) \right) dx, \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ik_{1,y,l} \left(\tilde{p}_l^{(1)} \exp \{ ik_{1,y,l} (d_0 - d_1) \} - \tilde{q}_l^{(1)} \exp \{ -ik_{1,y,l} (d_0 - d_1) \} \right) \times \\
 & \times \int_0^T \exp \left\{ i \left(k_0 n_0 \sin \varphi - \frac{2\pi l}{T} \right) x \right\} \left(\sum_{p=0}^M X_p(x) Y_p(0) \right) dx = \\
 & = \left(\tilde{p}_l^{(1)} \exp \{ ik_{1,y,l} (d_0 - d_1) \} + \tilde{q}_l^{(1)} \exp \{ -ik_{1,y,l} (d_0 - d_1) \} \right) \times \\
 & \times \int_0^T \exp \left\{ i \left(k_0 n_0 \sin \varphi - \frac{2\pi l}{T} \right) x \right\} \left(\sum_{p=0}^M X_p(x) Y_p'(0) \right) dx, \quad (20)
 \end{aligned}$$

где $l = -M/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, M/2$.

Все интегралы в системе (19), (20) вычисляются аналитически. Приближенные собственные значения λ_l определяются численно путем решения уравнения (10).

4. Сравнение с методом плоских волн

Метод плоских волн – один из наиболее распространенных методов для исследования дифракционной эффективности дифракционных решеток [8, 17]. В статье [17] этот метод применен для моделирования решеток с одним штрихом на периоде. Однако метод применим и для случая задач дифракции на решетках с несколькими штрихами на периоде с различными значениями индекса преломления \tilde{n}_k . Для модификации метода необходимо пересчитать значения коэффициентов Фурье (ср. с формулой (12) в [17]) кусочно-постоянной функции $\tilde{n}(x)$ в полосе $y \in (0; h)$.

На рис. 2, 3 показаны результаты вычисления коэффициентов DE_{-1} , DE_0 , DE_1 методом плоских волн и модифицированным методом разделения переменных.

В проведенных экспериментах рассмотрена решетка, характеризующаяся индексом преломления $n_k = \tilde{n}_1 = 3.52$ (Si:H) (это же значение выбрано и

для подложки, т.е. покрытие не является многослойным), среда над решеткой однородна с индексом $n_0 = 1$. Угол падения рассчитывается по формуле

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\lambda_0}{T} - \sin(30^\circ)\right).$$

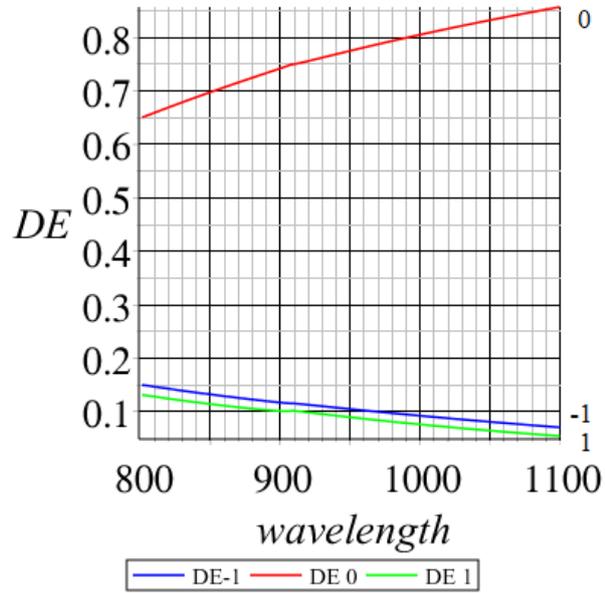


Рис 2. Зависимость коэффициентов DE_{-1} , DE_0 , DE_1 от длины волны (метод плоских волн)

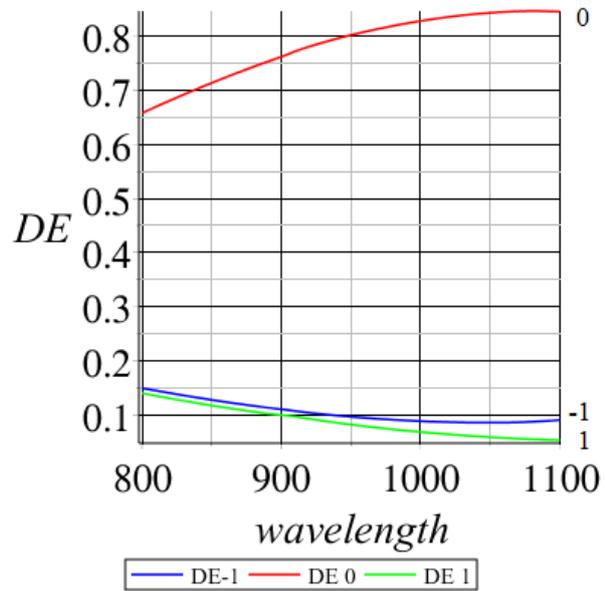


Рис 3. Зависимость коэффициентов DE_{-1} , DE_0 , DE_1 от длины волны (модифицированный метод разделения переменных)

Период $T = 900$ нм, число штрихов на периоде решетки – 2. Гребень решетки определяется параметрами $a_1 = 0.7T$, $a_2 = 0.8T$, $a_3 = 0.9T$, $a_4 = T$. Высота штриха равна $h = 79$ нм.

5. Результаты моделирования дифракционной решетки с многослойным покрытием

С помощью разработанного метода удалось получить результаты и в случае многослойной решетки, представленные на рис. 4. Для расчетов была использована следующая конфигурация решетки: параметры верхнего слоя решетки (слоя со штрихом) аналогичны параметрам, использованным при расчете графиков на рис. 2, 3, $J = 16$, $n_k = 1,48$ (SiO_2) при $k = 1,3,5,\dots,17$, $n_k = 3,52$ (Si:H) при $k = 2,4,6,\dots,16$, $d_1 = -139$ нм, $|d_2 - d_1| = 48$ нм, $|d_k - d_{k-1}| = 152$ нм ($k = 1,3,5,\dots,17$), $|d_k - d_{k-1}| = 64$ нм ($k = 2,4,6,\dots,16$).

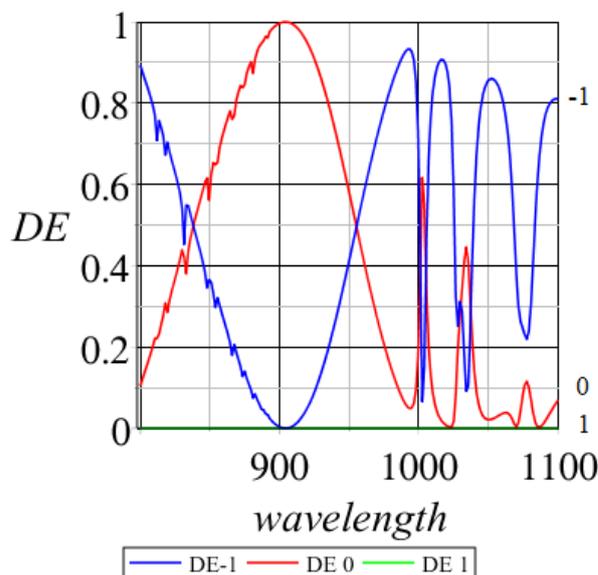


Рис. 4. Зависимость коэффициентов DE_{-1} , DE_0 , DE_1 от длины волны в случае многослойной подложки (модифицированный метод разделения переменных)

Численные результаты показывают, что использование многослойного покрытия позволяет повысить дифракционные эффективности определенных порядков. В данном случае дифракционная эффективность первого порядка при длине волны $\lambda_0 = 990$ нм превышает 90 %.

Заключение

В работе описано применение модифицированного метода разделения переменных для расчета дифракционной эффективности одномерной цилиндрической диэлектрической решетки с многослойным покрытием в случае падения на нее плоской волны. Предложена и верифицирована эффективная

программная реализация метода, проведено сравнение результатов расчетов с расчетами методом плоских волн.

Список литературы

1. Britten J. A., Molander W. A., Komashko A. M., Barty C. P. Multilayer dielectric gratings for petawatt-class laser systems // Proc. SPIE 5273, Laser-Induced Damage in Optical Materials: 2003. 2004. Vol 5273. P. 1–7. URL: <https://doi.org/10.1117/12.524015>
2. Nguyen H. T., Britten J. A., Carlson T. C., Nissen J. D. [et al.]. Gratings for high-energy petawatt-class lasers // Proc. SPIE 5991, Laser-Induced Damage in Optical Materials: 2005. 2005. Vol. 5991, № 59911M. P. 1–8. URL: <https://doi.org/10.1117/12.633689>
3. Bonod N., N'euport J. Diffraction gratings: from principles to applications in high-intensity lasers // Advances in Optics and Photonics. 2016. Vol. 8, № 1. P. 156–199. URL: <https://doi.org/10.1364/AOP.8.000156>
4. Beier F., Hupel C., Nold J. [et al.]. Narrow linewidth, single mode 3 kW average power from a directly diode pumped ytterbium-doped low NA fiber amplifier // Optics Express. 2016. Vol. 24, № 6. P. 6011–6020. URL: <https://doi.org/10.1364/OE.24.006011>
5. Dawson J. W., Messerly M. J., Beach R. J. [et al.]. Analysis of the scalability of diffraction-limited fiber lasers and amplifiers to high average power // Optics express. 2008. Vol. 16, № 17. P. 13240–13266. URL: <https://doi.org/10.1364/OE.16.013240>
6. Guan H., Jin Y., Liu S. [et al.]. Broadband trapeziform multilayer dielectric grating for femtosecond pulse compressor: design, fabrication, and analysis // Laser Physics. 2013. Vol. 23, № 11. P. 1–9. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1054-660X/23/11/115301>
7. Oliver J. B., Kessler T. J., Huang H. [et al.]. Thin-film design for multilayer diffraction gratings // Proc. SPIE 5991, Laser-Induced Damage in Optical Materials: 2005. 2006. Vol. 5991. P. 1–7. URL: <https://doi.org/10.1117/12.638818>
8. Moharam M. G., Grann E. B., Pommet D. A. Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings // J. Opt. Soc. Am. A. 1995. Vol. 12, № 5. P. 1068–1077.
9. Quan L., Yunxia J., Jianhong W., Peiliang G. Fabrication of the polarization independent spectral beam combining grating // Proc. SPIE 10255, Selected Papers of the Chinese Society for Optical Engineering Conferences held October and November 2016. 2017. Vol. 1025514. P. 1–7. URL: <https://doi.org/10.1117/12.2266500>
10. Junming C., Yunxia J., Jianda S. Design of broadband polarization-independent multilayer dielectric grating // Proc. SPIE 10339, Pacific Rim Laser Damage 2017: Optical Materials for High-Power Lasers. 2017. Vol. 1033911. P. 1–5. URL: <https://doi.org/10.1117/12.2269729>
11. He T., Zhang J., Jiao H., Wang Z., Cheng X. Near-infrared broadband Si:H/SiO₂ multilayer gratings with high tolerance to fabrication errors // Nanotechnology. 2020. Vol. 31, № 31. P. 1–7. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6528/ab8768>
12. Inki Kim [et al.]. Optical characterizations and thermal analyses of HfO₂/SiO₂ multilayered diffraction gratings for high-power continuous wave laser // Journal of Physics Photonics. 2020. Vol. 2, № 2. P. 1–10. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/2515-7647/ab7b0f>
13. URL: www.gsolver.com.
14. URL: www.lighttrans.com.
15. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. Т. 1. Дифракционные решетки. Киев : Наукова думка, 1986.
16. Popov E. Gratings: Theory and Numeric Applications, Second Revisited Edition. Institut Fresnel, AMU, CNRS, ECM, 2014.

17. Цупак А. А. Анализ дифракционной эффективности одномерно-периодической дифракционной решетки методом плоских волн (случай ТЕ-поляризации) // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 3. С. 3–14. doi:10.21685/2072-3040-2020-3-1

References

1. Britten J.A., Molander W.A., Komashko A.M., Barty C.P. Multilayer dielectric gratings for petawatt-class laser systems. *Proc. SPIE 5273, Laser-Induced Damage in Optical Materials: 2003*. 2004;5273:1–7. Available at: <https://doi.org/10.1117/12.524015>
2. Nguyen H.T., Britten J.A., Carlson T.C., Nissen J.D. [et al.]. Gratings for high-energy petawatt-class lasers. *Proc. SPIE 5991, Laser-Induced Damage in Optical Materials: 2005*. 2005;5991(59911M):1–8. Available at: <https://doi.org/10.1117/12.633689>
3. Bonod N., N'euport J. Diffraction gratings: from principles to applications in high-intensity lasers. *Advances in Optics and Photonics*. 2016;8(1):156–199. Available at: <https://doi.org/10.1364/AOP.8.000156>
4. Beier F., Hupel C., Nold J. [et al.]. Narrow linewidth, single mode 3 kW average power from a directly diode pumped ytterbium-doped low NA fiber amplifier. *Optics Express*. 2016;24(6):6011–6020. Available at: <https://doi.org/10.1364/OE.24.006011>
5. Dawson J.W., Messerly M.J., Beach R.J. [et al.]. Analysis of the scalability of diffraction-limited fiber lasers and amplifiers to high average power. *Optics express*. 2008;16(17):13240–13266. Available at: <https://doi.org/10.1364/OE.16.013240>
6. Guan H., Jin Y., Liu S. [et al.]. Broadband trapeziform multilayer dielectric grating for femtosecond pulse compressor: design, fabrication, and analysis. *Laser Physics*. 2013;23(11):1–9. Available at: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1054-660X/23/11/115301>
7. Oliver J.B., Kessler T.J., Huang H. [et al.]. Thin-film design for multilayer diffraction gratings. *Proc. SPIE 5991, Laser-Induced Damage in Optical Materials: 2005*. 2006;5991:1–7. Available at: <https://doi.org/10.1117/12.638818>
8. Moharam M.G., Grann E.B., Pommet D.A. Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*. 1995;12(5):1068–1077.
9. Quan L., Yunxia J., Jianhong W., Peiliang G. Fabrication of the polarization independent spectral beam combining grating. *Proc. SPIE 10255, Selected Papers of the Chinese Society for Optical Engineering Conferences held October and November 2016*. 2017;1025514:1–7. Available at: <https://doi.org/10.1117/12.2266500>
10. Junming C., Yunxia J., Jianda S. Design of broadband polarization-independent multilayer dielectric grating. *Proc. SPIE 10339, Pacific Rim Laser Damage 2017: Optical Materials for High-Power Lasers*. 2017;1033911:1–5. Available at: <https://doi.org/10.1117/12.2269729>
11. He T., Zhang J., Jiao H., Wang Z., Cheng X. Near-infrared broadband Si:H/SiO₂ multilayer gratings with high tolerance to fabrication errors. *Nanotechnology*. 2020;31(31):1–7. Available at: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6528/ab8768>
12. Inki Kim [et al.]. Optical characterizations and thermal analyses of HfO₂/SiO₂ multilayered diffraction gratings for high-power continuous wave laser. *Journal of Physics Photonics*. 2020;2(2):1–10. Available at: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/2515-7647/ab7b0f>
13. Available at: www.gsolver.com.
14. Available at: www.lighttrans.com.
15. Shestopalov V.P., Kirilenko A.A., Masalov S.A., Sirenko Yu.K. *Rezonansnoe rasseyaniye voln. T. 1. Difraktsionnye reshetki = Resonant scattering of waves. Volume 1. Diffraction gratings*. Kiev: Naukova dumka, 1986.
16. Popov E. *Gratings: Theory and Numeric Applications, Second Revisited Edition*. Institut Fresnel, AMU, CNRS, ECM, 2014.

17. Tsupak A.A. Analysis of the diffraction efficiency of a one-dimensional periodic diffraction grating by the plane wave method (case of TE polarization). *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2020;(3):3–14. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2020-3-1

Информация об авторах / Information about the authors

Юрий Геннадьевич Смирнов

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Yuriy G. Smirnov

Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Валерия Юрьевна Мартынова

старший преподаватель кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: lynxbax@mail.ru

Valeriya Yu. Martynova

Senior lecturer of the sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Марина Александровна Москалева

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: m.a.moskaleva1@gmail.com

Marina A. Moskaleva

Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Алексей Александрович Цупак

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: altsupak@yandex.ru

Aleksey A. Tsupak

Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of the sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 20.11.2021

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 23.11.2021

Принята к публикации / Accepted 29.11.2021